Positivity of the equilibrium of sparse large random Lotka-Volterra ecosystems

Imane Akjouj*

Ecole d'automne Matrices Et Graphes Aléatoires, 11 au 15 octobre 2021

Mots-clefs :

Systèmes linéaires, matrices aléatoires, matrices creuses, concentration gaussienne, calcul gaussien, équations de Lotka-Volterra.

Résumé :

En écologie mathématique, lors de la modélisation d'écosystèmes faisant intervenir des espèces qui interagissent entre elles, l'usage de grands systèmes de Lotka-Volterra est courant. Ainsi, pour un réseau trophique composé de n espèces, on note $\mathbf{x}_n(t) = (x_k(t))_{k\in[n]}$ le vecteur des abondances des espèces au temps t. Les abondances sont reliées entre elles par les équations suivantes :

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = x_k(t)\left(1 - x_k(t) + \sum_{\ell\in[n]} M_{k\ell}x_\ell(t)\right) \qquad \text{pour} \quad k \in [n]\,,$$

où $M_n = (M_{k\ell})_{k,\ell\in[n]}$ correspond à la matrice des interactions.

Le coeur de l'étude s'intéresse à l'existence à l'équilibre, i.e. lorsque $\frac{d\mathbf{x}_n}{dt} = 0$, d'une solution faisable, c'est-à-dire une solution $\mathbf{x}_n$ dont toutes les composantes sont strictement positives, ce qui correspond au scénario où aucune espèce ne disparait.

Depuis les années 70, de nombreux écologues ont considéré les interactions comme aléatoires et font appel aux résultats de la théorie des matrices aléatoires dans l'étude des réseaux trophiques. Certaines études suggèrent par ailleurs que les écosystèmes sont creux, ce qui signifie que la matrice des interactions M_n est creuse.

Pour ce faire, une première approche est de considérer le produit de Hadamard $\Delta_n \circ A_n = (\Delta_{ij}A_{ij})$ entre une matrice d'adjacence $\Delta_n = (\Delta_{ij})$ de taille n associée à un graphe déterministe d_n-régulier et A_n une matrice aléatoire de taille n à entrées i.i.d de loi Gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$. La matrice des interactions M_n est alors de la forme :

$$M_n = \frac{\Delta_n \circ A_n}{\alpha_n\sqrt{d_n}},$$

où $\alpha = (\alpha_n)$ est une suite de réels strictement positifs.

Le paramètre de normalisation α permettra de démontrer l'existence asymptotique, i.e. lorsque n tend vers l'infini, d'un seuil de faisabilité pour deux modèles : lorsque la matrice M_n a une structure par blocs et lorsque le paramètre de sparsité d_n est proportionnel à n.

*Laboratoire Paul Painlevé - Université de Lille - France